TERCER PARCIAL 2010.

TIPO A

1.- Sea $T: P_2 \to P_3$ la transformación lineal dada por

$$T(ax^2 + bx + c) = (a + b)x^3 + c - a$$

(a) Demostrar que es lineal. (2pts)
(b) Encontrar la matriz A_T que representa a T en las bases canónicas (2pts)
(c) Encontrar una base para el núcleo de T.
(d) Encontrar una base para la imagen de T.

2.- Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar si existen, una matriz D diagonal y una matriz C invertible, tal que $D = C^{-1}AC$. (7pts)

3.- Sea $H = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ subespacio de $V = M_{2x2}(R)$ Pata V considere el producto interno

$$< \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} > = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$$

(a) Encontrar una base para el complemento ortogonal de H. (4pts)
(b) Para $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ encontrar $F \in H \;\; y \; G \in H^{\perp}$ tal que $E = F + G$ (7 pts)

4.- Verdadero y falso. Justifique si cada afirmación es verdadera o falsa.

a) Dado que $\lambda = 1 + i$ es autovalor de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ es autovector asociado a λ de la matriz (2pts)

b) Existe una única transformación lineal $T: R^2 \to P_2$ tal que (3pts)

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x \;\; ; \;\; T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x^2 - 1 \;\; T\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -3x^2 - x + 3$$

NOTA: Falta 6 pts en el parcial, este ejercicio corresponde a imagen, nulidad de una matriz tema ya evaluado en el segundo parcial.

TIPO B

1.- Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ en el caso que la matriz A sea diagonalizable, encontrar D diagonal y C invertible tal que $D = C^{-1}AC$ (Justifique) (8pts)

2.- Sea $T: M_{2x2} \to P_3$ la función definida por

$$T\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} = (a_1 + a_2)x + (a_2 + a_3)x^2$$

a) Demostrar que T es una transformación lineal (2pts)
b) Encontrar A_T la matriz asociada a la transformación lineal T. (2pts)
c) Encontrar una base para el nucleo de T, y la imagen de T. Encontrar rango y nulidad de T. (6 pts)

3.- Sea $H = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ subespacio de R^3 con el producto interno

$$< \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} > = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Encuentre:

a) Una base ortonomal para $H^{\perp}$ el complemento ortognal de H. (3pts)
b) Una base ortonormal para H (3pts)
c) Dado $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ escriba v como $p + h$, donde $p \in H^{\perp}$ y $h \in H$ (3pts)

4.- Diga, justificando su respuesta, si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.

a) El espacio vectorial real $C[-1,1]$ con el producto interno $< f, g > = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ las funciones $f(t) = t$ $g(t) = 1 + t$ son ortogonales. (3pts)

b) Sea A una matriz 4x6 entonces $\dim(C_A) \leq 4$

NOTA: Falta 6 pts en el parcial, este ejercicio corresponde a imagen, nulidad de una matriz tema ya evaluado en el segundo parcial.

TIPO C

1.- Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Encontrar los auto valores y auto vectores de A. (5 pts)

b) En el caso de que la matriz A sea diagonalizable, encontrar D diagonal y C invertible tal que $D = C^{-1}AC$ (justificar) (3pts)

2.- Sea $T: R^3 \to P_2$ la función definida por

$$T(a, b, c) = 2c + (a - b)x^2$$

a) Demostrar que T es una transformación lineal (2pts)
b) Encontrar la matriz asociada a la transformación lineal T (2pts)
c) Encontrar una base para el nucleo de T y una base para el espacio imagen de T. Encontrar el rango y nulidad. (6 pts)

3.- Sea $H = gen\{1, x\}$ subespacio de $P_2[-1,1]$ con el producto interno

$$< p, q > = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

a) Encontrar una base para $H^{\perp}$ (6 pts)
b) Para $r(x) = 1 + 3x^2$ encontrar $h(x) \in H$ y $p(x) \in H^{\perp}$ tal que $r(x) = h(x) + p(x)$ (4pts)

4.- Para cada una de las siguientes afirmaciones, indique si es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

a) Si λ es autovalor de A entonces $\lambda + 2$ es autovalor de $A + 2I$ (3 pts)

b) En C^3 con el producto interno $(u, v) = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + u_3\overline{v_3}$, los vectores

$u = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \\ 3+i \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 6-2i \\ 2i \\ -1+i \end{pmatrix}$ son ortogonales. (3 pts)

NOTA: Falta 6 pts en el parcial, este ejercicio corresponde a imagen, nulidad de una matriz tema ya evaluado en el segundo parcial.